

Wartości własne i wektory własne macierzy

A - dowolna macierz kwadratowa stopnia r.

Wielomianem charakterystycznym tej macierzy nazywamy wielomian $W(\lambda) = \det(A - \lambda I)$

Równanie $W(\lambda) = 0$ nazywamy **równaniem charakterystycznym**. Pierwiastki tego równania to **wartości własne** lub pierwiastki charakterystyczne tej macierzy.

Niech $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ - wartości własne macierzy

A o krotnościach $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ ($k \leq r$).

Własność:

- I) suma wartości własnych (z krotnościami) jest równa śladowi macierzy.
- II) Macierz jest osobliwa wtedy i tylko wtedy, gdy zero jest jej wartością własną (bo wyznacznik macierzy jest równy iloczynowi wartości własnych).

Przykład.

Macierz $P = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 4 \\ 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ ma równanie charakterystyczne

$$W(\lambda) = \det \begin{bmatrix} \frac{1}{4} - \lambda & \frac{3}{4} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} - \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - \lambda \frac{7}{12} - \frac{5}{12} = 0$$

i wartości własne: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \frac{-5}{12}$.

Wektory własne

Wektorem własnym macierzy A odpowiadającym **wartości własnej** λ nazywamy niezerowy wektor v spełniający warunek (wektor kolumnowy)

$$Av = \lambda v$$

Macierze A, B są podobne, jeśli istnieje nieosobliwa macierz C, taka, że $B = C^{-1}AC$.

Własności

- Macierze podobne mają taki sam wielomian charakterystyczny (zatem mają takie same wartości własne),
- Jeśli macierz A stopnia n ma n różnych wartości własnych $a_1, a_2, \dots, a_n$, to macierz A jest podobna do macierzy diagonalnej

$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

Twierdzenie (Hamiltona-Cayleya)

Macierz jest pierwiastkiem jego wielomianu charakterystycznego.

Wektor $v \in V$ jest wektorem własnym macierzy A odpowiadającym wartości własnej a wtedy

i tylko wtedy, gdy $(A - aI) \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$, gdzie $v_1, v_2, \dots, v_n$ to współrzędne wektora v .

Przykład

Wyznamy wartości własne i wektory własne macierzy A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Wielomian charakterystyczny tej macierzy

$$\det \begin{bmatrix} 1-x & 1 & 0 \\ 0 & -1-x & 0 \\ 0 & 0 & 2-x \end{bmatrix} = -(1+x)(1-x)(2-x)$$

Zatem macierz A ma wartości własne 1, -1 i 2.

Wyznamy wektor własny odpowiadający wartości własnej 1.

$$\begin{bmatrix} 1-1 & 1 & 0 \\ 0 & -1-1 & 0 \\ 0 & 0 & 2-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ stąd } \begin{cases} v_2 = 0 \\ -2v_2 = 0 \\ v_3 = 0 \end{cases} \text{ więc wektorem własnym jest np. } (1, 0, 0)^T.$$

Wyznamy wektor własny odpowiadający wartości własnej -1.

$$\begin{bmatrix} 1+1 & 1 & 0 \\ 0 & -1+1 & 0 \\ 0 & 0 & 2+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ stąd } \begin{cases} 2v_1 + v_2 = 0 \\ 0 = 0 \\ 3v_3 = 0 \end{cases} \text{ więc wektorem własnym jest np. } (1, -2, 0)^T.$$

Wyznamy wektor własny odpowiadający wartości własnej 2.

$$\begin{bmatrix} 1-2 & 1 & 0 \\ 0 & -1-2 & 0 \\ 0 & 0 & 2-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ stąd } \begin{cases} -v_1 + v_2 = 0 \\ -3v_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \text{ więc wektorem własnym jest np. } (0, 0, 1)^T.$$

Zauważmy, że otrzymaliśmy różne wartości własne i odpowiadające im wektory własne.

Twierdzenie (Jordana)

Dla dowolnej macierzy A stopnia n , istnieje macierz do niej podobna, która ma postać zwaną **kanoniczną postacią Jordana**

$$J = \begin{bmatrix} K_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & K_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & K_n \end{bmatrix}$$

gdzie

$$K_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i \end{bmatrix} \quad \text{w szczególności może być } K_i = [\lambda_i]$$

λ_i jest wartością własną, występującą tyle razy ile wynosi jej krotność jako pierwiastka wielomianu charakterystycznego.

Macierze K_i to **klatki Jordana**. Jednej wartości własnej może odpowiadać więcej niż jedna klatka Jordana.

Dla danej macierzy A zachodzi równość

$$J = B^{-1}AB,$$

dla pewnej nieosobliwej macierzy B .

L.Kowalski 20.10.19